全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧升级版

主编 肖德好

导学案

高中数学3

基础版

必修第一册 RJA

本书为智慧教辅升级版

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS 目录 导学案

04 第四章　指数函数与对数函数

PART FOUR

05 第五章　三角函数

PART FIVE

预备知识　初高中衔接

衔接一　数与式

【学习目标】

1. 理解绝对值的几何意义，会求含绝对值的方程与不等式.
2. 掌握因式分解的方法，并能熟练运用平方差和立方差公式.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　解含绝对值的方程或不等式

新知构建

1. 绝对值的意义

(1)代数意义：正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值仍是零，即

$$|a|=\begin{cases}a, a>0,\\0, a=0,\\-a, a<0.\end{cases}$$

(2)绝对值的几何意义：一个数的绝对值，是数轴上表示它的点到原点的距离.

2. 绝对值的性质

(1)$|a|\geqslant 0$，$|a|\geqslant a$，$|a|\geqslant -a$；

(2)$|a|=|b|\Leftrightarrow a=b$ 或 $a=-b$；

(3)$|a^2|=|a|^2=a^2$，$|ab|=|a|\cdot|b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$.

典例解析

例 1　解下列方程或不等式：

(1)$|x-3|=2$；

(2)$|x-2|<3$；

(3)$|x-1|+|x+2|=5$；

(4)$|2x-1|<x+2$.

变式 1　解下列方程或不等式：

(1)$|2x-1|=x+1$；

(2)$|x-1|>|x+2|$.

变式 2　若关于 x 的不等式 $|kx-1|\leqslant 5$ 的解是 $-3\leqslant x\leqslant 2$，则 k 的值是________.

◆ 要点二　乘法公式的应用

新知构建

乘法公式

平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

三数和平方公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$.

典例解析

例 2 化简下列各式：

(1)$(-x-1)(x^2-x+1)$；

(2)$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$；

(3)$x(x-2)^2-(x^2-4x+4)(x+2)$.

例 3 (1)已知 $a+b=3$，$ab=-8$，求下列各式的值.

①a^2+b^2；②a^2-ab+b^2；③$(a-b)^2$.

(2)已知 $x+y=2$，求 x^3+y^3+6xy 的值.

变式 1 化简下列各式：

(1)$(3+2y)(9-6y+4y^2)$；

(2)$(x^3-1)(x^6+x^3+1)(x^9+1)$.

变式 2 (1)已知 $x+y=1$，求 x^3+y^3+3xy 的值；

(2)已知 $a-b=2$，$ab=48$，求 a^4+b^4 的值.

◆ 要点三　因式分解

新知构建

因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式，像这样的式子变形叫作这个多项式的因式分解.

因式分解的常用方法：提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法、待定系数法和因式定理法.

典例解析

例 4 用合适的方法进行因式分解.

(1)$2mn^4-162m$；

(2)$x^2+98y^2-21xy+x-7y$；

(3)$2ax-10ay+5by-bx$；

(4)x^3+2x^2-5x-6.

变式 对下列各式进行因式分解：

(1)a^5b-ab；

(2)$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$；

(3)$4x^2-2x+6xy-3y$.

[素养小结]

因式分解的常用方法：提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法.需要熟记乘法公式.

衔接二　函数

【学习目标】

1. 熟练掌握一次函数、反比例函数和二次函数的图象和性质.
2. 理解函数的最值.
3. 会利用数形结合的方法求解相关问题.

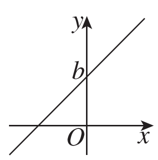
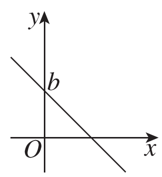
课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　常见函数的图象与性质

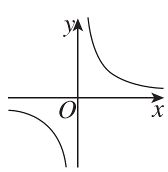
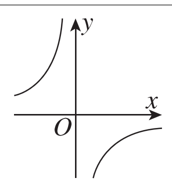
新知构建

1. 一次函数的图象与性质

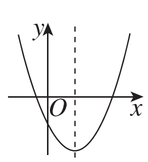
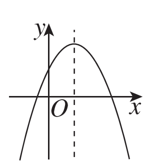
$y=kx+b(k\neq 0)$	$k>0$	$k<0$
图象		
性质	y 随 x 的增大而增大	y 随 x 的增大而减小
	当 $b=0$ 时，图象过原点 $(0,0)$	

（b 是函数的图象与 y 轴交点的纵坐标）

2. 反比例函数的图象与性质

$y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$	$k>0$	$k<0$
图象		
性质	在每个象限，y 随 x 的增大而减小	在每个象限，y 随 x 的增大而增大

3. 二次函数的图象与性质

函数	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$y=ax^2+bx+c(a<0)$
图象		
开口方向	向上	向下

（续表）

函数	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$y=ax^2+bx+c(a<0)$
对称轴	直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
增减性	当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值，且 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值，且 $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

◆ 要点二　函数图象变换

新知构建

1. 平移变换

$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[k<0,\text{向下平移}|k|\text{个单位长度}]{k>0,\text{向上平移} k \text{个单位长度}}$ $y=f(x)+k$ 的图象；

$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[h<0,\text{向右平移}|h|\text{个单位长度}]{h>0,\text{向左平移} h \text{个单位长度}}$ $y=f(x+h)$ 的图象.

2. 翻折变换

$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{右翻左}]{\text{去左留右}}$ $y=f(|x|)$ 的图象；

$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{下翻上}]{\text{去下留上}}$ $y=|f(x)|$ 的图象.

总结：函数图象的变换口诀为“左加右减，上加下减”.

典例解析

例 1 指出下列函数图象的变换过程.

从 $y=3x^2$ 到①$y=3(x+2)^2$;②$y=3x^2-4$;③$y=3x^2-6x+8$.

变式 1 指出下列函数图象的变换过程.

(1)从 $y=2x$ 到①$y=2x-4$;②$y=2(x+1)$;③$y=2(x-1)+3$.

(2)从 $y=\frac{2}{x}$ 到①$y=\frac{2}{x+1}$;②$y=\frac{2}{x}-1$;③$y=\frac{2}{x-1}+3$.

变式 2 将二次函数 $y=2(x+2)^2-5$ 的图象向左平移 3 个单位长度后,再将所得图象作关于 x 轴对称,则所得图象的顶点坐标为________.

[素养小结]

平移变换:左加右减、上加下减,其中“左加右减”是对 x 进行加减,比如函数 $y=3x+1$ 的图象右移 2 个单位长度,得到的图象对应的函数解析式不是 $y=3x-2+1$,而是 $y=3(x-2)+1$,这个括号不能丢.

◆ 要点三 二次函数的最值

新知构建

当 $m\leqslant x\leqslant n(m<n)$时,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最值问题

要领:

①抛物线的开口方向;

②对称轴与 m,n 的位置(最多四种情况):

对称轴在 m 左;对称轴在 m,n 之间且偏 m;对称轴在 m,n 之间且偏 n;对称轴在 n 右.

典例解析

角度 1 定轴定范围

例 2 求函数 $y=x^2-4x+1$ 在下列自变量取值范围内的最大值和最小值.

(1)$3\leqslant x\leqslant 4$;(2)$0\leqslant x\leqslant 1$;(3)$0\leqslant x\leqslant 3$.

变式 已知函数 $y=-x^2+4x+a$,其中 $0\leqslant x\leqslant 1$,若函数有最小值 -2,则函数的最大值为________.

角度 2　动轴定范围

例 3 求 $y=x^2-2ax-1$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时的最大值和最小值.

变式 已知函数 $y=x^2+2ax+1$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时的最大值为 4,求实数 a 的值.

角度 3　定轴动范围

例 4 当 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 时,求函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2}$ 的最小值.

变式 当 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 时,求函数 $y=-2x^2-x+4$ 的最大值.

第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合的概念

【学习目标】

1. 了解集合的含义，理解元素与集合的属于关系.
2. 能在自然语言和图形语言的基础上，用符号语言刻画集合.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　元素与集合的概念

新知构建

1. 元素与集合的概念：一般地，我们把研究对象统称为________，把一些元素____________叫作集合（简称为集）.

2. 符号表示：常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.

【诊断分析】 1. 尝试列举初中学过的数集.

2. 到定点的距离等于定长的点组成的图形一定是圆吗？

◆ 要点二　集合中元素的性质

新知构建

1. 集合中元素的三个性质为：__________、________、无序性.

2. 集合相等：只要构成两个集合的________是一样的，我们就称这两个集合是相等.

【诊断分析】 1. 判断正误.（请在括号中打“√”或“×”）

(1)中国著名的科学家可以组成一个集合.（　）

(2)历届数学界的诺贝尔奖—菲尔兹奖的得主可以组成一个集合.（　）

(3)不超过 2025 的非负实数可以组成一个集合.（　）

2. 某中学高一年级共有 6 个班，这 6 个班组成一个集合 A.

(1)高一(2)班、高二(6)班是集合 A 中的元素吗？

(2)若 $a\in A,b\in A$，则元素 a,b 有什么关系？为什么？

典例解析

例 1 (1)下列各组对象不能组成集合的是（　）

A. 中国古代四大发明

B. 所有无理数

C. 必修第一册中的数学难题

D. 小于 π 的正整数

(2)已知集合 A 中含有三个元素 $x,x+1,1$，集合 B 中含有三个元素 x,x^2+x,x^2，且 A 与 B 中的元素相同，则实数 x 的值为________.

变式 (1)(多选题)下列说法中正确的是（　）

A. 在平面内，与定点 A,B 等距离的点不能组成集合

B. 若集合 B 由“good”中的字母构成，则 B 中有 4 个元素

C. 一个集合中有三个元素 a,b,c，其中 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，则 $\triangle ABC$ 不可能是等边三角形

D. 体型庞大的海洋生物不能组成集合

(2)若由元素 $a^2,a-1$ 组成的集合与元素 $0,-1$ 组成的集合是同一个集合，则 $a=$________.

[素养小结]

(1)判定所给对象能组成集合的关键是所给对象满足确定性、互异性和无序性.

(2)对于求集合中参数的问题,常根据集合中元素的确定性得出参数的所有可能取值,再利用集合中元素的互异性进行检验.

◆ 要点三　元素与集合的关系

新知构建

1. 元素与集合的关系:如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a________集合 A,记作________;如果________________,就说 a 不属于集合 A,记作________.

2. 常用数集及其记法:

常见的数集	符号表示
自然数集	________
正整数集	________或________
整数集	________
有理数集	________
实数集	________

典例解析

例 2 (1)用符号"∈"或"∉"填空:0________$\mathbf{N}$;$\frac{1}{3}$________$\mathbf{Q}$;2.4________$\mathbf{Z}$;$\sqrt{3}$________$\mathbf{Q}$;4________$\mathbf{Z}$.

(2)已知集合 $A=\{12,a^2+4a,a-2\}$,若 $-3\in A$,则 $a=$________.

变式 (1)[2025·福建宁德高一期中] 用符号"∈"或"∉"填空:①若 A 为所有亚洲国家组成的集合,则泰国________A;②$\sqrt{2}$________$\mathbf{Q}$,$\frac{2}{7}$________$\mathbf{Q}$.

(2)由实数 $x,-x,|x|,-\sqrt{x^2},\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合,最多含有元素的个数为　(　　)

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

[素养小结]

判断一个元素是否属于某一集合,就是判断这个元素是否满足该集合元素的条件.若满足,就是"属于"关系;若不满足,就是"不属于"关系.特别注意,符号"∈"与"∉"只表示元素与集合的关系.

◆ 要点四　集合的表示法

新知构建

1. 列举法:把集合的所有元素一一列举出来,并用________括起来表示集合的方法叫作列举法(注意元素间要用","隔开,如$\{-1,0,1,2\}$).

2. 描述法:设 A 是一个集合,我们把集合 A 中所有具有________特征 $P(x)$的元素 x 所组成的集合表示为________,这种表示集合的方法称为描述法.

【诊断分析】 1. 方程$(x+1)(x-2)=0$ 的实数根组成的集合中有多少个元素?并用适当的方法表示这个集合.

2. 由抛物线 $y=x^2$ 上的点组成的集合中有多少个元素?并用适当的方法表示这个集合.

典例解析

角度 1　列举法表示集合

例 3 用列举法表示下列集合.

(1)中国国旗上所有颜色组成的集合;

(2)15 的正约数组成的集合;

(3)方程 $x^2=x$ 的所有实数解组成的集合;

(4)直线 $y=x$ 与 $y=2x-1$ 的交点组成的集合.

[素养小结]

用列举法表示集合应注意的三点：

(1)应先弄清集合中的元素是什么，是数还是点，还是其他元素；

(2)集合中的元素一定要写全，但不能重复；

(3)若集合中的元素是点，则应将有序实数对用小括号括起来表示一个元素.

角度2　描述法表示集合

例4 用描述法表示下列集合.

(1)二次函数 $y=x^2+1$ 的函数值组成的集合 A；

(2)被3除余2的正整数组成的集合 B；

(3)$\{2,4,6,8,10\}$；

变式 用适当的方法表示下列集合.

(1)大于1且不大于17的质数组成的集合 A；

(2)所有奇数组成的集合 B；

(3)平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2$ 上的点组成的集合 C；

(4)$D=\{(x,y)\mid x+y=5,x\in\mathbf{N}_+,y\in\mathbf{N}_+\}$.

[素养小结]

(1)用描述法表示集合，应先弄清集合的属性，是数集、点集还是其他的类型.一般地，数集用一个字母代表其元素，而点集则用一个有序实数对来代表其元素.

(2)若描述部分出现元素记号以外的字母时，则要对新字母说明其含义或指出其取值范围.

1.2　集合间的基本关系

【学习目标】

1. 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集.
2. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系，体会图形对理解抽象概念的作用.
3. 在具体情境中，了解空集的含义.

课堂明新知

知识导学　典例探究

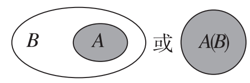
◆ 要点一　子集

新知构建

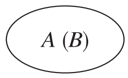
1. 子集

定义	一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中____________元素都是集合 B 中的元素，就称集合 A 为集合 B 的子集
记法与读法	记作______(或______)，读作“A 包含于 B”(或“B 包含 A”)

(续表)

Venn图	在数学中，经常用平面上封闭曲线的____代表集合，这种图称为 Venn 图
图示	
结论	(1)反身性：任何一个集合是它本身的子集，即 A____A； (2)传递性：对于集合 A，B，C，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，则 A____C

2. 集合的相等关系

定义	一般地,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,那么集合 A 与集合 B 相等
记法	记作________
符号表示	若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$
图示	

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)$\{0\}\subseteq\{x\mid x<5,x\in\mathbf{R}\}$. ( )

(2)设 $A=\{x\mid x$ 是三角形$\}$,则 $A\subseteq A$. ( )

(3)$0\subseteq\{-1,0,1\}$. ( )

2. 符号"$\in$"与"$\subseteq$"的区别是什么?

典例解析

例 1 判断下列每对集合之间的关系.

(1)$A=\{1,2,3\}$,$B=\{x\mid x$ 是 8 的约数$\}$;

(2)$C=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}\}$,$D=\{y\mid y=4m,m\in\mathbf{N}\}$.

变式 (1)(多选题)以下说法正确的是 ( )

A. $0\in\{x\mid x^2=0\}$

B. $\{1\}\in\mathbf{N}$

C. $\{2,1\}=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$

D. $\{x\mid x<1\}\subseteq\{x\mid x<0\}$

(2)指出下列各集合之间的关系,并用 Venn 图表示:

$A=\{x\mid x$ 是四边形$\}$,$B=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$,$C=\{x\mid x$ 是矩形$\}$,$D=\{x\mid x$ 是正方形$\}$.

[素养小结]

判断集合间关系的方法

(1)列举观察法:当集合中元素较少时,可以列出集合中的全部元素,通过定义得出集合之间的关系.

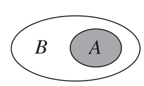
(2)集合元素特征法:首先弄清集合中元素的特征,再利用集合中元素的特征判断集合间的关系.

(3)数形结合法:利用 Venn 图、数轴等直观地判断集合间的关系.

◆ 要点二 真子集

新知构建

1. 真子集

定义	如果集合 $A\subseteq B$,但存在元素__________,且________,就称集合 A 是集合 B 的真子集
记法与读法	记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$),读作"A 真包含于 B"(或"B 真包含 A")
图示	
结论	(1)$A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C$,则 A____C; (2)$A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则 A____B

2. 空集

定义	一般地,我们把________________的集合叫作空集
记法	记为$\varnothing$
规定	空集是任何集合的______,即$\varnothing \subseteq A$
特性	(1)空集只有一个子集,即它的本身,$\varnothing \subseteq \varnothing$; (2)若$A \neq \varnothing$,则$\varnothing$________$A$

典例解析

例 2 写出集合$\{a,b,c\}$的所有子集和真子集,并写出子集和真子集的个数.试猜想含n个元素的集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的所有子集的个数是多少?真子集的个数及非空真子集的个数呢?

变式 (1)[2025·豫北名校高一联考] 设集合$A=\{1,2,3,4,5,9\}$,$B=\{x\mid x\in A,\sqrt{x}\in \mathbf{Z}\}$,则$B$的非空子集的个数为 ( )

A. 3　　B. 4

C. 7　　D. 8

(2)已知集合M满足$\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,写出所有满足条件的集合$M$.

[素养小结]

1.假设集合A中含有n个元素,则

(1)A的子集有2^n个;

(2)A的非空子集有(2^n-1)个;

(3)A的真子集有(2^n-1)个;

(4)A的非空真子集有(2^n-2)个.

2.求给定集合的子集的两个注意点:

(1)按子集中元素个数的多少,以一定的顺序来写;

(2)在写子集时不要忘记空集和集合本身.

◆ 要点三 由集合间的关系求参数

例 3 (1)设$A=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$,$B=\{x\mid ax-1=0\}$,若$B\subseteq A$,则实数a的取值组成的集合$C=$__________.

(2)[教材 P9T5(2)] 已知集合$A=\{x\mid 0<x<a\}$,$B=\{x\mid 1<x<2\}$,若$B\subseteq A$,求实数a的取值范围.

变式 设非空集合$A=\{x\mid -2<x\leqslant m-3n\}$,$B=\{x\mid 3m+n<x\leqslant 2\}$.若$A=B$,则实数$m=$________,$n=$________.

[素养小结]

由集合间的关系求参数问题的注意点及常用方法:

(1)注意点:①不能忽视集合为$\varnothing$的情形;②当集合中含有字母参数时,一般需要分类讨论.

(2)常用方法:对于用不等式给出的集合,已知集合的包含关系求相关参数的范围(值)时,常采用数形结合的思想,借助数轴解答.

1.3　集合的基本运算

第 1 课时　集合的并集、交集

【学习目标】

1. 理解并集、交集的概念，会用文字语言、符号语言及图形语言来描述这些概念.
2. 了解并集、交集的一些简单性质，会求两个简单集合的并集与交集.
3. 能使用 Venn 图表达集合的并集与交集.

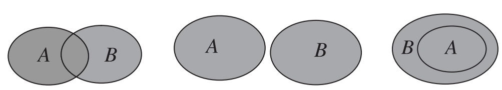
课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　集合的并集

新知构建

1. 并集的三种语言表示：

文字语言	一般地，由所有____________的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记作______(读作“A 并 B”)
符号语言	$A\cup B=\{x\mid$________$\}$
图形语言	

2. 并集的运算性质

(1)$A\cup A=A$；(2)$A\cup\varnothing=A$；(3)$A\cup B=B\cup A$；(4)若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$，反之也成立.

典例解析

例 1 (1)设集合 $A=\{4,5,6,8\}$，$B=\{3,5,7,8\}$，则集合 $A\cup B=$　(　　)

A. $\{5,8\}$　　B. $\{3,4,5,6,7,8\}$

C. $\{4,6\}$　　D. $\{3,4,6,7\}$

(2)已知集合 $A=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>4\}$，那么 $A\cup B=$　(　　)

A. $\{x\mid-2\leqslant x\leqslant 4\}$

B. $\{x\mid x\leqslant 3$ 或 $x>4\}$

C. $\{x\mid-2\leqslant x\leqslant -1\}$

D. $\{x\mid-1\leqslant x\leqslant 3\}$

变式 (1)已知集合 $A=\{x\mid 2\leqslant x<4\}$，$B=\{x\mid 3x-7\geqslant 8-2x\}$，则 $A\cup B=$________.

(2)满足 $M\cup\{2\}=\{1,2,4\}$ 的集合 M 的个数为________.

[素养小结]

并集运算应注意的问题：

(1)对于用描述法表示的集合，应先看集合的代表元素是什么，然后将集合化简，再按定义求解.

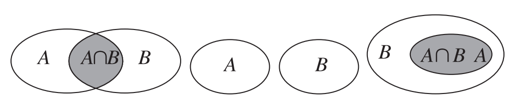
(2)求两个集合的并集时要注意利用集合中元素的互异性这一属性，重复的元素只能算一个.

(3)对于元素个数无限的集合进行并集运算时，可借助数轴，利用数轴分析法求解，但要注意端点的值能否取到.

◆ 要点二　集合的交集

新知构建

1. 交集的三种语言表示：

文字语言	一般地，由所有属于____________的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记作______(读作“A 交 B”)
符号语言	$A\cap B=\{x\mid$________$\}$
图形语言	

2. 交集的运算性质

(1)$A\cap A=A$；(2)$A\cap\varnothing=\varnothing$；(3)$A\cap B=B\cap A$；(4)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$，反之也成立.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$，则 A 与 B 的交集为空集.　(　　)

(2)若 $x\in(A\cap B)$，则 $x\in(A\cup B)$.　(　　)

(3)若 $x\in(A\cup B)$，则 $x\in(A\cap B)$.　(　　)

典例解析

例 2 (1) 已知集合 $M=\{x|-1<x\leqslant 1\}$,$N=\{x|0<x<2\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

B. $\{x|0<x<1\}$

C. $\{x|-1<x\leqslant 1\}$

D. $\{x|-1<x<2\}$

(2) 设集合 $A=\{-2,2\}$,$B=\{x|x^2-5x-m=0\}$.若 $A\cap B=\{2\}$,则 $B=$ ( )

A. $\{-2,3\}$　　B. $\{2\}$

C. $\{-2,2\}$　　D. $\{2,3\}$

变式 (1)[2025·嘉兴一中高一月考] 集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 3\}$,$B=\{x|x^2<4\}$,那么集合 $A\cap B=$ ( )

A. $\{x|-2<x<2\}$

B. $\{x|-1<x<2\}$

C. $\{x|-2<x\leqslant 3\}$

D. $\{x|-1<x<3\}$

(2)已知集合 $A=\{(x,y)|y=x\}$,$B=\{(x,y)|y=5-4x\}$,则 $A\cap B=$ ( )

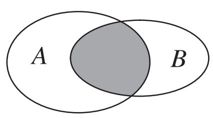
A. $(1,1)$

B. $\{(1,1)\}$

C. $(-1,-1)$

D. $\{(-1,-1),(1,1)\}$

(3)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+x-6=0\}$,则图中阴影部分表示的集合为 ( )



A. $\{2\}$　　B. $\{3\}$

C. $\{-3,2\}$　　D. $\{-2,3\}$

[素养小结]

求集合 $A\cap B$ 的常见类型:

①若 A,B 中的元素是方程的根,则应先解方程求出方程的根,再求两集合的交集.

②若 A,B 中的元素是有序实数对,则 $A\cap B$ 是指两个方程组成的方程组的解集,交集是点集.

③若 A,B 是无限数集,则可以利用数轴来求解,但要注意利用数轴表示不等式时,含有端点的值用实心点表示,不含有端点的值用空心圈表示.

◆ 要点三　根据并集与交集运算求参

例 3 已知集合 $A=\{x|-3<x\leqslant 4\}$,集合 $B=\{x|k+1\leqslant x\leqslant 2k-1\}$,且 $A\cup B=A$,求实数 k 的取值范围.

变式 已知集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\{x|m-2\leqslant x\leqslant 2m+1\}$.

(1)若 $A\cup B=A$,求实数 m 的取值范围;

(2)若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

[素养小结]

(1)在利用交集、并集的性质解题时,常常会遇到 $A\cap B=A$,$A\cup B=B$ 这类问题,解答时常借助于交、并集的定义以及集合间的关系去分析,如由 $A\cap B=A$ 得 $A\subseteq B$,由 $A\cup B=B$ 得 $A\subseteq B$ 等.

(2)当集合 $B\subseteq A$ 时,如果集合 A 是一个确定的集合,而集合 B 不确定,那么运算时要考虑 $B=\varnothing$ 的情况.

第2课时　集合的全集、补集

【学习目标】

1. 在具体情境中，了解全集的含义.
2. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，能求给定子集的补集.
3. 能使用Venn图表示集合的基本运算，体会图形对理解抽象概念的作用.

课堂明新知

◆ 要点一　全集与补集

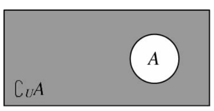
新知构建

1. 全集

(1)定义：一般地，如果一个集合含有所研究问题中涉及的________，那么就称这个集合为全集.

(2)记法：全集通常记作______.

2. 补集

<table>
<tr><td rowspan="3">定义</td><td>文字语言</td><td>对于一个集合 A，由全集 U 中________的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作______</td></tr>
<tr><td>符号语言</td><td>$\complement_U A=\{x\mid$________$\}$</td></tr>
<tr><td>图形语言</td><td></td></tr>
<tr><td>性质</td><td colspan="2">(1) $\complement_U A\subseteq U$；
(2) $\complement_U U=$______，$\complement_U \varnothing=$______；
(3) $\complement_U(\complement_U A)=$______；
(4) $A\cup(\complement_U A)=$______，$A\cap(\complement_U A)=$______</td></tr>
</table>

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)一个集合的补集一定含有元素.（　）

(2)设全集 $U=\mathbf{R}$，存在 $x_0\in U$，$x_0\notin A$，且 $x_0\notin\complement_U A$.（　）

(3)设全集 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$，则 $\complement_U A=\{(x,y)\mid x\leqslant 0$ 且 $y\leqslant 0\}$.（　）

典例解析

例1 (1)已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $M=\{1,2,3,4\}$，则 $\complement_U M=$（　）

A. 5　　B. $\{5\}$

C. $\{3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

(2)已知集合 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x>2\}$，则 $\complement_U A=$（　）

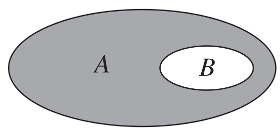
A. $\{x\mid x<-1$ 或 $x>2\}$

B. $\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2\}$

D. $\{x\mid -1<x<2\}$

变式 (1)集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\{y\mid y=x^2+2\}$，则图中阴影部分表示的集合为（　）



A. $\{x\mid x\geqslant 1\}$

B. $\{x\mid x\geqslant 2\}$

C. $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$

D. $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$

(2)已知全集 U，集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$\complement_U A=\{2,4,6\}$，$\complement_U B=\{1,4,6\}$，则集合 $B=$______.

[素养小结]

求集合的补集的方法：

(1)定义法：当集合中的元素较少时，可利用定义直接求解.

(2)Venn图法：借助Venn图可直观地求出补集.

(3)数轴法：当集合中的元素连续且无限时，可借助数轴求解，此时需注意端点取值.

◆ 要点二　并集、交集、补集的综合运算

例 2 [教材 P14T4] 已知集合 $A=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$，$B=\{x\mid 2<x<10\}$，求 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$，$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$.

变式 (1)(多选题)已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$，$B=\{x\mid 3-2x>0\}$，则　　(　　)

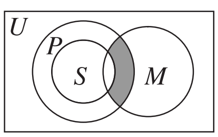
A. $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$

B. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{3}{2}\leqslant x<2\right\}$

C. $A\cup B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$

D. $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=\mathbf{R}$

(2)如图，U 为全集，M，P，S 是 U 的三个子集，则阴影部分所表示的集合是　　(　　)



A. $[P\cap(\complement_U S)]\cup M$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap(\complement_U S)$

D. $(M\cap P)\cup(\complement_U S)$

[素养小结]

(1)解决与集合的交、并、补集运算有关的综合问题时，一般先运算括号内的部分，如求 $(\complement_U A)\cap B$ 时，可先求出 $\complement_U A$，再求交集；求 $\complement_U(A\cup B)$ 时，可先求出 $A\cup B$，再求补集.

(2)不等式中的等号在补集中能否取到，要引起重视，还要注意补集是全集的子集.

◆ 要点三　利用集合间的关系求参

例 3 已知集合 $A=\{x\mid a<x<a+1\}$，$B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 0\}$.

(1)若 $a=1$，求 $A\cup B$；

(2)在① $A\cup B=B$，② $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=\varnothing$，③ $B\cup(\complement_{\mathbf{R}}A)=\mathbf{R}$ 这三个条件中任选一个作为已知条件，求实数 a 的取值范围.

变式 (1)设全集 $U=\{1,3,m^2+m-9\}$，集合 $A=\{1,m\}$，$\complement_U A=\{3\}$，则实数 $m=$________.

(2)[2025·厦门一中高一月考] 已知集合 $A=\{x\mid |x-1|\leqslant 2\}$，集合 $B=\{x\mid m-1\leqslant x\leqslant 2m\}$ $(m\in\mathbf{R})$. 若 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

[素养小结]

由集合的补集求解参数的方法：

(1)当集合中元素个数有限时，可利用补集定义并结合集合知识求解.

(2)当集合中元素个数无限时，一般利用数轴分析法求解.

1.4　充分条件与必要条件

1.4.1　充分条件与必要条件

【学习目标】

1. 通过对典型数学命题的梳理，理解充分条件的意义，理解判定定理与充分条件的关系.
2. 通过对典型数学命题的梳理，理解必要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系.

课堂明新知　知识导学　典例探究

◆ 要点一　充分条件与必要条件

新知构建

	“若 p，则 q”为真命题	“若 p，则 q”为假命题
推出关系	p______q	p______q
条件关系	p 是 q 的______条件 q 是 p 的______条件	p 不是 q 的______条件 q 不是 p 的______条件
定理关系	一般地，数学中的每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件； 一般地，数学中的每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件	

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)“$x^2=y^2$”是“$x=y$”的充分条件.　(　　)

(2)“内错角相等”是“两直线平行”的充分条件.　(　　)

(3)“$ab=0$”是“$b=0$”的必要条件.　(　　)

典例解析

例 1　下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件？

(1)若 $4x^2-mx+9$ 是完全平方式，则 $m=12$；

(2)若 $(x-1)^2+(y-2)^2=0$，则 $(x-1)(y-2)=0$；

(3)在△ABC 中，若 $A+B=90°$，则 $C=90°$.

例 2　下列各题中，哪些 q 是 p 的必要条件？

(1)p：$x=1$，q：$x-1=\sqrt{x-1}$；

(2)p：$-2\leqslant x\leqslant 5$，q：$-1\leqslant x\leqslant 5$；

(3)p：a 是自然数，q：a 是正整数；

(4)p：三角形是等边三角形，q：三角形是等腰三角形.

变式　下列所给的各组 p，q 中，p 是 q 的充分条件的有哪些？p 是 q 的必要条件的有哪些？

(1)p：两个三角形全等，q：两个三角形的面积相等；

(2)p：三角形是直角三角形，q：三角形的两个锐角互余；

(3)p：$m\leqslant 1$，q：关于 x 的方程 $x^2+2x+m=0$ 有实数解；

(4)p：$ab=0$，q：$a=0$.

[素养小结]

充分条件、必要条件的几种判定方法：

(1)定义法：根据 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$ 进行判断，适用于定义、定理的判断性问题.

(2)集合法：根据 p，q 成立的对象组成的集合之间的包含关系进行判断，多适用于命题中涉及参数范围的推断问题.

◆ 要点二　充分条件、必要条件的应用

例 3 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，非空集合 $B=\{x\mid 2-a\leqslant x\leqslant 1+2a\}$.

(1)若"$x\in A$"是"$x\in B$"的充分条件，求实数 a 的取值范围；

(2)若"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要条件，求实数 a 的取值范围.

变式 (1)[2025·济南一中高一月考] 已知 p：$-4<x-a<4$，q：$2<x<3$，若 p 是 q 的必要条件，则实数 a 的取值范围是________.

(2)"一元二次方程 $(x-a)(x-a-1)=0$ 有一个正实数根和一个负实数根"的一个充分条件但不是必要条件是________.

[素养小结]

根据充分条件、必要条件求参数的取值范围时，主要根据充分条件、必要条件与集合间的关系，将问题转化为相应的两个集合之间的包含关系，然后建立关于参数的不等式(组)进行求解，有时还需要借助数轴解决问题.

1.4.2　充要条件

【学习目标】

通过对典型数学命题的梳理，理解充要条件的意义，理解数学定义与充要条件的关系.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　充要条件

新知构建

1. 逆命题

将命题"若 p，则 q"中的条件 p 和结论 q 互换，就得到一个新的命题"若 q，则 p"，称这个命题为原命题的逆命题.

2. 充要条件

如果"若 p，则 q"和它的逆命题"若 q，则 p"均是真命题，即既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作________. 此时，p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，我们说 p 是 q 的________________，简称为____________. 显然，如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件. 概括地说，如果 $p\Leftrightarrow q$，那么 p 与 q________________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)已知 p：两个角是对顶角，q：两个角相等，则 p 是 q 的充要条件.　(　)

(2)已知 p：$x=2$，q：$x^2-4x+4=0$，则 p 是 q 的充要条件.　(　)

(3)已知集合 A，B，C 均不是空集，p：$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，$C\subseteq A$，q：$A=B=C$，则 p 是 q 的充要条件.　(　)

典例解析

例 1 [教材 P21 例 3] 下列各题中,哪些 p 是 q 的充要条件?

(1) p:四边形是正方形,q:四边形的对角线互相垂直且平分;

(2) p:两个三角形相似,q:两个三角形三边成比例;

(3) p:$xy>0$,q:$x>0$,$y>0$;

(4) p:$x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根,q:$a+b+c=0(a\neq0)$.

变式 下列各题中,试分别指出 p 是 q 的什么条件.

(1) p:$ab=0$,q:$a=0$;

(2) p:四边形的对角线相等,q:四边形是正方形;

(3) p:$a+5$ 是无理数,q:a 是无理数;

(4) p:$A\subseteq B$,q:$A\cup B=B$.

[素养小结]

判断 p 是 q 的充要条件的两种思路:

(1)命题角度:判断 p 是 q 的充要条件,主要是判断 $p\Rightarrow q$ 及 $q\Rightarrow p$ 是否成立.若 $p\Rightarrow q$ 成立,则 p 是 q 的充分条件,同时 q 是 p 的必要条件;若 $q\Rightarrow p$ 成立,则 p 是 q 的必要条件,同时 q 是 p 的充分条件;若二者都成立,则 p 与 q 互为充要条件.

(2)集合角度:关于充分条件、必要条件、充要条件,当不容易判断 $p\Rightarrow q$ 及 $q\Rightarrow p$ 是否成立时,也可以从集合角度去判断,结合集合中"小集合⇒大集合"的关系来理解,这对解决与逻辑有关的问题大有益处.

此外,对于较复杂的关系,常用⇒,⇐,⇔等符号进行传递,画出它们的综合结构图,可降低解题难度.

◆ 要点二　充要条件的证明

例 2 [教材 P22 例 4] 已知:⊙O 的半径为 r,圆心 O 到直线 l 的距离为 d.求证:$d=r$ 是直线 l 与⊙O 相切的充要条件.

变式 已知△ABC 的三边长为 a,b,c,其中 $a=2$.求证:△ABC 为等边三角形的充要条件是 $b^2+c^2-2(b+c)=bc-4$.

[素养小结]

证明充要条件时要从充分性和必要性两个方面分别证明,首先分清哪个是条件,哪个是结论,然后确定推出方向,即充分性需要证明"条件"⇒"结论",必要性需要证明"结论"⇒"条件".